

Integralregning er en matematisk disciplin, som omhandler at finde stamfunktioner og løse integraler. Integralregning er yderst vigtigt, da det kan bruges til at beregne mål på geometriske figurer. I dette notesæt giver vi en grundig gennemgang af integralregning, med fokus på brugbare teknikker og formler.

Integralregning

$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, hvis

$$F'(x) = f(x)$$

for alle $x \in \text{Dm}(f)$.

Bemærk at hvis $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$, så er $F(x) + K$ det også, for enhver konstant $K \in \mathbb{R}$.

Det ubestemte integral

Det ubestemte integral af en funktion $f(x)$, beskriver mængden af stamfunktioner til $f(x)$ og angives som

$$\int f(x) \, dx$$

Her kaldes $f(x)$ for integranden, og dx angiver, hvilken variabel der integreres efter.

For to funktioner $f(x)$ og $g(x)$, og en konstant $c \in \mathbb{R}$, gælder der at

$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx \quad (1)$$

$$\int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx \quad (2)$$

Disse formler følger fra sumreglen og konstantreglen fra differentialregning.

Bevis. Der gælder at $c \cdot F(x)$, er en stamfunktion til $x \cdot f(x)$ da

$$(c \cdot F(x))' = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x)$$

Deraf kan vi konkludere at

$$\begin{aligned} \int c \cdot f(x) \, dx &= c \cdot F(x) + K \\ &= c \cdot \left(F(x) + \frac{K}{c} \right) \\ &= c \cdot \int f(x) \, dx \end{aligned}$$

Der gælder at $F(x) + G(x)$ er en stamfunktion til $f(x) + g(x)$ da

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

Deraf kan vi konkludere at

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx &= F(x) + K_1 + G(x) + K_2 \\ &= F(x) + G(x) + K \\ &= \int f(x) + g(x) \, dx \end{aligned}$$

□

Det bestemte integral

Vi definerer det bestemte integral fra a til b som

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Udover de tilsvarende formler for sum (1) og konstant (2), gælder der yderligere

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx \quad (3)$$

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0 \quad (4)$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad (5)$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(b + a - x) \, dx \quad (6)$$

Alle reglerne følger umiddelbart fra definitionen af det bestemte integral.

Bevis. Formel (3)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= F(b) - F(a) \\ &= -\left(F(a) - F(b)\right) \\ &= - \int_b^a f(x) \, dx \end{aligned}$$

Formel (4)

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x) \, dx &= F(a) - F(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Formel (5)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= F(b) - F(a) \\ &= F(b) - F(a) + F(c) - F(c) \\ &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \end{aligned}$$

Formel (6)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(b + a - x) \, dx &= [-F(b + a - x)]_a^b \\ &= -F(b + a - b) - \left(-F(b + a - a)\right) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) \, dx \end{aligned}$$

□

Lige og ulige funktioner

Ved at udnytte symmetrien bag lige og ulige funktioner, kan vi opnå en række brugbare resultater.

Hvis $f(x)$ er en ulige funktion, så gælder der at

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad (7)$$

Bevis. Lad $F(x)$ være en stamfunktion til $f(x)$. Vi viser først, at hvis $f(x)$ er en ulige funktion, så gælder der at $F(x)$ er en lige funktion

$$\begin{aligned} (F(x) - F(-x))' &= F'(x) - (-1) \cdot F'(-x) \\ &= F'(x) + F'(-x) \\ &= f(x) + f(-x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Derfor må $F(x) - F(-x)$ være en konstant

$$F(x) - F(-x) = K$$

Sætter vi $x = 0$, har vi at

$$F(0) - F(-0) = K$$

Dermed at $K = 0$, dvs. $F(x) = F(-x)$, så $F(x)$ er en lige funktion. Da har vi at

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= F(a) - F(-a) \\ &= F(a) - F(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Hvis $f(x)$ er en lige funktion, så gælder der at

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx \quad (8)$$

Bevis. Antag at $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$. Da gælder at

$$\begin{aligned} F'(-x) &= (-1) \cdot F'(-x) \\ &= -f(-x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Så $F(-x)$ er en stamfunktion til $-f(x)$. En anden stamfunktion til $-f(x)$ er $-F(x) + K$, dvs.

$$F(-x) = -F(x) + K$$

Når $x = 0$ er $K = 2 \cdot F(0)$, så

$$F(-x) = -F(x) + 2 \cdot F(0)$$

for alle valg af x . Dermed gælder der at

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x) \, dx &= F(a) - F(-a) \\ &= F(a) - (-F(a) + 2 \cdot F(0)) \\ &= 2 \cdot (F(a) - F(0)) \\ &= 2 \cdot \int_0^a f(x) \, dx\end{aligned}$$

□

Formel (8) kan hjælpe til at omskrive en særlig type af integraler.

Hvis $f(x)$ er en lige funktion og $g(x)$ er en ulige funktion, så gælder der at

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1 + b^{g(x)}} \, dx = \int_0^a f(x) \, dx \quad (9)$$

for en konstant $b \in \mathbb{R}$.

Bevis. Kald integralet for I . Vi omskriver først ved hjælp af formel (6)

$$I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1 + b^{g(x)}} \, dx = \int_{-a}^a \frac{f(-x)}{1 + b^{g(-x)}} \, dx$$

Vi benytter at $f(x)$ er en lige funktion og $g(x)$ er en ulige funktion (formel (7) og (8)). Herefter forlænger vi med $b^{g(x)}$

$$I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1 + b^{-g(x)}} \, dx = \int_{-a}^a \frac{f(x) \cdot b^{g(x)}}{b^{g(x)} + 1} \, dx$$

Dermed har vi at

$$\begin{aligned}2I &= \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1 + b^{g(x)}} \, dx + \int_{-a}^a \frac{f(x) \cdot b^{g(x)}}{b^{g(x)} + 1} \, dx \\ &= \int_{-a}^a \frac{f(x) \cdot (1 + b^{g(x)})}{1 + b^{g(x)}} \, dx \\ &= \int_{-a}^a f(x) \, dx\end{aligned}$$

Da $f(x)$ er en lige funktion, er

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_0^a f(x) \, dx$$

□

Integration ved substitution

Hvis man møder et integral, hvor integranden på sin vis består af en sammensat funktion, kan man i nogle tilfælde benytte integration ved substitution, til at løse integralet. Man kan tænke på det, som at man benytter kædereolen baglæns.

Hvis $g(x)$ er en differentiabel funktion, gælder der at

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du \quad (10)$$

Under skift af variabel $u = g(x)$.

Bevis. Ved kædereglens gælder der at

$$F'(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Dermed er

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} F'(u) \, du \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du \end{aligned}$$

□

Nogle tekstbøger og kilder foretrækker at arbejde med infinitesimaler i form af at isolere du eller dx , når man skriver den afledte ved Leibniz' notation

$$u'(x) = \frac{du}{dx}$$

og så heraf lave substitutionen, ved en reel erstatning i ligningen. Vi vil dog i dette notesæt lave integration ved substitution, ved at benytte formel (10).

Integration ved substitution kan også anvendes til at omskrive et ubestemt integral, og metoden er næsten identisk til formel (10)

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int f(u) \, du \quad (11)$$

Partiel integration

Når man skal beregne integralet af et produkt af to funktioner, kan man benytte partiel integration (eller delvis integration) til at omskrive integralet.

Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er to differentiable funktioner, gælder der at

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx \quad (12)$$

Bevis. Ved produktreglen gælder der at

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)]_a^b &= \int_a^b (f(x) \cdot g(x))' \, dx \\ &= \int_a^b f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \, dx \\ &= \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx \end{aligned}$$

Ved at isolere $\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$ fås den ønskede formel. □

Igen gælder der en tilsvarende version for det ubestemte integral

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx \quad (13)$$

Uegentlige integraler

Uegentlige integraler opstår, når man enten integrerer over et uendeligt stort interval, eller funktionen der integreres over, antager uendeligt store værdier.

Vi behandler disse værdier ved at indføre grænseværdier på flg. måde

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(x) dx$$

I de næste par afsnit, vil vi kigge på formler og sætninger, som behandler uegentlige integraler.

En simpel version af Glasser's sætning

En af de nyere formler i integralregning, er Glasser's sætning. Vi viser en simpel version af formelen forneden

For en konstant $a > 0$ gælder der at

$$\int_{-\infty}^\infty f\left(x - \frac{a}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^\infty f(x) dx \quad (14)$$

Bevis. Integralet er diskontinuert i $x = 0$. Vi opdeler det på flg. måde

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^\infty f\left(x - \frac{a}{x}\right) dx \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{a}{x}\right) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^\infty f\left(x - \frac{a}{x}\right) dx}_{I_2} \end{aligned}$$

Vi indfører variablen

$$\begin{aligned} u = x - \frac{a}{x} &\Rightarrow x^2 - ux - a = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4a}}{2} \end{aligned}$$

Bemærk at vi vælger løsningen med ”+” da $x > 0$. Heraf er

$$x'(u) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4a}} \right)$$

Når $x \rightarrow 0^+$ vil $u \rightarrow -\infty$, og når $x \rightarrow \infty$ vil $u \rightarrow \infty$. Ved integration ved substitution, får vi dermed at

$$I_2 = \int_{-\infty}^\infty f(u) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4a}} \right) du$$

På tilsvarende vis, kan vi omskrive I_1 . Vi får dermed at

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4a}} \right) du + \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4a}} \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4a}} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4a}} \right) \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \end{aligned}$$

□