

I dette notesæt vil vi kigge på numeriske metoder til at løse ordinære førsteordens differentialligninger (ODE'er). Dvs. differentiailligninger på formen

$$y' = f(x, y)$$

under betingelsen $y(x_0) = y_0$.

Eulers metode

Eulers metode benytter tangenthældninger til at tilnærme sig en løsning. Man udvælger først et punkt, som man ved løsningen går igennem, hvorefter man bevæger sig langs en tangent, til at finde det næste punkt. Eulers metode vil altså beregne en samling af punkter, som tilnærmer sig løsningen.

Vælg $h > 0$, som angiver afstanden mellem punkterne. Løsningen $y(x)$ tilnærmes med punkterne defineret ud fra

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + n \cdot h \\ y_n &= y_{n-1} + h \cdot y'(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned} \tag{1}$$

for $n \geq 1$.

Bemærk, at præcisionen af tilnærmelsen afhænger af størrelsen på h .

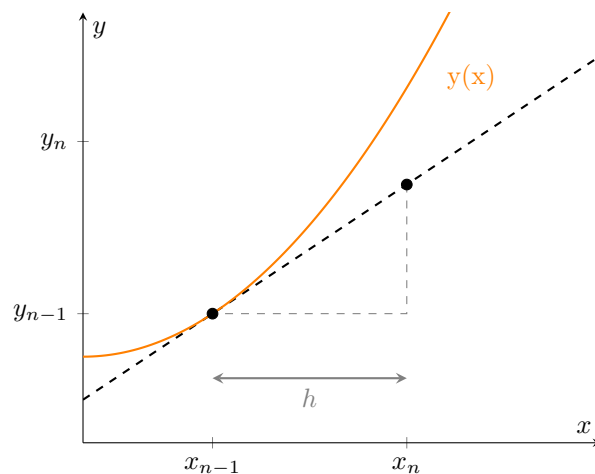
Bevis. For den lodrette afstand, tager vi udgangspunkt i startpunktet x_0 . Da vi bevæger os i en afstand af $h > 0$ mellem hvert punkt, må vi nødvendigvis have bevæget os $n \cdot h$ fra startpunktet, x_0 , til det n 'te punkt, x_n .

For den lodrette afstand, udnytter vi hældningen i et punkt y_{n-1} til at finde det næste punkt y_n . Ved topunktsformlen er hældningen mellem punkterne (x_{n-1}, y_{n-1}) og (x_n, y_n) lig med

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

Der gælder desuden at hældningen i punktet (x_{n-1}, y_{n-1}) er lig med $y' = f(x_{n-1}, y_{n-1})$. Dvs.

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad \Rightarrow \quad y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})$$



□

Vi kan faktisk forbedre Eulers metode, ved at vælge tangenthældningen som middelværdien af de to tangenthældninger i punkterne (x_{n-1}, y_{n-1}) og (x_n, y_n) . I en forbedret tilnærmelse vil den lodrette afstand være bestemt ved

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2} \cdot (f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})))$$

Runge-Kuttas metode

Runge-Kuttas metode er i princippet en yderligere forbedring af Eulers metode. Her tager man dog bare et vægtet gennemsnit af fire forskellige tangenthældninger.

Vi sætter

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ k_2 &= f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2} \cdot k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2} \cdot k_2\right) \\ k_4 &= f(x_{n-1} + h, y_{n-1} + h \cdot k_3) \end{aligned} \tag{2}$$

Herefter tilnærmes løsningen med punkterne defineret ud fra

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \tag{3}$$

for $n \geq 1$.

For den lodrette afstand, tager vi nu udgangspunkt i et punkt (x_{n-1}, y_{n-1}) , og ønsker at bevæge ud fra en vægtet gennemsnitlige hældning, af fire forskellige hældninger i intervallet $h > 0$.

k_1 angiver hældningen i starten af intervallet. Bevæger vi os langs denne hældning, ind til midten af intervaller, angiver k_2 hældningen her. Bevæger vi os i stedet ind til midten af intervallet med hældningen k_2 , opnår vi et andet midtpunkt, hvor k_3 angiver hældningen. k_4 angiver hældningen i slutningen af intervallet, hvor slutpunktet er bestemt vha. hældningen k_3 .

Vi lader de to forskellige bud på hældninger i midtpunktet vægte mere end hældningerne i endepunkterne og ender på den gennemsnitlige hældning, som beskrevet i formel (3). Intuitiv kan det måske give god mening, at lade midtpunkterne vægte mere end endepunkterne, men hvorfor vi netop vælger denne vægtning, kræver en del viden om Taylorudvikling i flere variable, hvilket vi vil undlade at gå i dybden med i dette notesæt.

Adams-Bashforth metode

Hvor Runge-Kuttas og Eulers metode kun benytter sig af et enkelt punkt, til at tilnærme det næste, så bruger Adams-Bashforth flere foregående punkter, til at tilnærme det næste. Forneden vil vi kigge på Adams-Bashforth metode anvendt på to foregående punkter, men den kan i princippet anvendes på vilkårligt mange foregående punkter.

Først beregnes y_1 ved hjælp af Eulers metode. Herefter tilnærmes løsningen med punkterne defineret ud fra

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2} \cdot (3 \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}) - f(x_{n-2}, y_{n-2})) \tag{4}$$

for $n \geq 1$.

Bevis. Integrerer vi vores differentiaalligninger over intervallet $x_{n-1} \leq x \leq x_n$, gælder der ved integralregningens hovedsætning, at

$$y(x_n) - y(x_{n-1}) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} y'(x) dx = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x, y(x)) dx$$

Der gælder således at

$$y(x_n) = y(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x, y(x)) dx$$

For at beregne integralet, vælger vi at tilnærme $f(x, y(x))$ med et polynomium $P(x)$. Da vi kender 2 foregående punkter, må vi lade $P(x)$ være en ret linje. Om $P(x)$ skal der gælde at

$$P(x_{n-1}) = f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))$$

$$P(x_{n-2}) = f(x_{n-2}, y(x_{n-2}))$$

Dette er netop opfyldt, hvis vi skriver

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) \cdot \frac{x - x_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} + f(x_{n-2}, y(x_{n-2})) \cdot \frac{x - x_{n-1}}{x_{n-2} - x_{n-1}} \\ &= f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) \cdot \frac{x - x_{n-2}}{h} - f(x_{n-2}, y(x_{n-2})) \cdot \frac{x - x_{n-1}}{h} \end{aligned}$$

*Metoden til at konstruere et sådan polynomium, kaldes Lagranges interpolation.

Da y_n , y_{n-1} og y_{n-2} er tilnærmelser for de korrekte funktionsværdier til løsningen, kan vi antage at

$$y(x_n) \approx y_n, \quad y(x_{n-1}) \approx y_{n-1}, \quad y(x_{n-2}) \approx y_{n-2}$$

Indsætter vi dette, sammen med tilnærmelsen for $f(x, y(x))$ foroven, har vi at

$$y_n = y_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot \frac{x - x_{n-2}}{h} - f(x_{n-2}, y_{n-2}) \cdot \frac{x - x_{n-1}}{h} dx$$

Integralet kan gøres noget lettere at arbejde med, ved at anvende substitutionen

$$t = \frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_{n-2}}{h} - 1 \quad \Rightarrow \quad t + 1 = \frac{x - x_{n-2}}{h}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + \int_0^1 \left(f(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot (t + 1) - f(x_{n-2}, y_{n-2}) \cdot t \right) \cdot h dt \\ &= y_{n-1} + h \cdot \left(f(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot \left[\frac{1}{2}t^2 + t \right]_0^1 - f(x_{n-2}, y_{n-2}) \cdot \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 \right) \\ &= y_{n-1} + h \cdot \left(f(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot \frac{3}{2} - f(x_{n-2}, y_{n-2}) \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= y_{n-1} + \frac{h}{2} \cdot \left(3 \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}) - f(x_{n-2}, y_{n-2}) \right) \end{aligned}$$

□

Taylor's metode

Taylor's metode benytter Taylorrækker til at tilnærme en løsning lokalt omkring punktet $(x_0, y(x_0))$. Vi kræver således at funktionen $f(x, y)$ er n gange differentiabel.

I modsætning til de ovenstående metoder, opnår vi altså ikke en række punkter som tilnærmer sig løsningen, men derimod et polynomium, som tilnærmer sig løsningen.

Ved rækkeudvikling er

$$\begin{aligned} y(x) &\approx \sum_{i=0}^n \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i \\ &= y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \end{aligned} \quad (5)$$

Jo større valg af n , jo mere præcis vil ens løsning blive omkring punktet.

Bevis. Vi tilnærmer løsningen $y(x)$, som et Taylorpolynomium af grad n omkring punktet x_0 . Et Taylorpolynomium af grad n til $y(x)$, er et n 'te-grads polynomium, som opfylder at funktionsværdien for de n første afledte i punktet x_0 , stemmer overens med funktionsværdien af de n første afledte for $y(x)$ i samme punkt.

Hvis vi kalder Taylorpolynomiet for $T_n(x)$, skal det altså opfylde at

$$T_n^{(i)}(x_0) = y^{(i)}(x_0)$$

for alle $0 \leq i \leq n$.

Da $T_n(x)$ er et polynomium af grad n , kan vi skrive

$$T_n(x) = c_0 + c_1 \cdot (x - x_0) + c_2 \cdot (x - x_0)^2 + \dots + c_n \cdot (x - x_0)^n$$

for passende konstanter $c_0, \dots, c_n$. Vi ønsker at bestemme disse konstanter så definitionen af et Taylorpolynomium er opfyldt, og derefter vise at de stemmer overens med dem i formel (4).

Bemærk, at vi netop vælger at skrive $T_n(x)$ på denne måde, da det så blive nemmere at regne funktionsværdier i x_0 , da vilkårligt mange led reducerer til 0.

Vi ser først at

$$y(x_0) = T_n(x_0) = c_0$$

Differentierer vi $T_n(x)$, får vi at

$$T_n'(x) = c_1 + 2 \cdot c_2 \cdot (x - x_0) + 3 \cdot c_3 \cdot (x - x_0)^2 + \dots + n \cdot c_n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$

hvoraf

$$y'(x_0) = T_n'(x_0) = c_1$$

Differentierer vi igen, får vi at

$$T_n''(x) = 2 \cdot c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3 \cdot (x - x_0) + 3 \cdot 4 \cdot c_4 \cdot (x - x_0)^2 + \dots + (n-1) \cdot n \cdot c_n \cdot (x - x_0)^{n-2}$$

hvoraf

$$y''(x_0) = T_n''(x_0) = 2 \cdot c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{y''(x_0)}{2}$$

Efter at have differentieret k gange, får vi

$$T_n^{(k)}(x) = k! \cdot c_k + \text{"led, alle med en faktor } (x - x_0)\text{"}$$

dvs.

$$y^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0) = k! \cdot c_k \quad \Rightarrow \quad c_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Således fås den ønskede tilnærmelse af $y(x)$.

□

Picards metode

Picards metode danner en følge af funktioner $y_0, y_1, \dots, y_n$, som nærmer sig den korrekte løsning $y(x)$. Jo flere iterationer man foretager sig, desto mere præcis bliver tilnærmelsen.

Vi sætter først

$$y_0(x) = y_0$$

Herefter beregnes de efterfølgende tilnærmelse ved

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \quad (6)$$

Man fortsætter indtil man har den ønskede præcision.

Picards metode har en række begrænsninger. Metoden virker nemlig kun hvis $f(x, y)$ er kontinuert, begrænset og opfylder Lipschitz-betingelsen i det interval, man forsøger at finde en løsning på. Af selv samme grund kræver det en hel del forarbejde at bevise Picards metode. Vi vil derfor undlade beviset i dette notesæt.

Bemærk dog, at ligning (6) egentlig blot følger af integralregningens hovedsætning, og kan vises ved at følge samme fremgangsmåde som i starten af beviset for Adams-Bashforth metoden. Udfordringen ligger i at bevise, at følgen af funktioner konvergerer mod en unik funktion.